

DOI: 10.16285/j.rsm.2015.06.013

莫尔圆极点确定的新方法

李大勇¹, 翟汉波¹, 高玉峰²

(1. 山东科技大学 土木工程与建筑学院 山东省土木工程防灾减灾重点实验室, 山东 青岛 266590;

2. 河海大学 岩土工程研究所, 江苏 南京 210098)

摘要: 莫尔圆在岩土材料的强度理论、应力路径以及地基承载力等方面具有广泛的应用。极点是莫尔应力圆上的一个特殊点, 具有惟一性, 通过极点, 可以求得任意分析平面的应力状态。特别是对于求解复杂状态下的应力问题, 莫尔圆极点法具有简便、快捷的优点。提出了定义极点的新方法——射线法, 利用应力隔离体力的平衡法则证明了该方法定义极点的正确性及惟一性, 并且发现定义极点的平行线法和法线法是射线法的两种特殊情况。通过比较, 发现不同方法所得到的极点位置并不相同, 但求得的任意面上的应力状态是相同的, 而且平行线法更便于使用。然而, 所提出的射线法能加深对莫尔圆极点的理解, 从而进一步推动其广泛应用。

关键词: 莫尔圆; 极点; 平行线法; 法线法; 射线法

中图分类号: TD8

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598(2015)06-1622-05

A new method for determining pole point of Mohr circle

LI Da-yong¹, ZHAI Han-bo¹, GAO Yu-feng²

(1. Shandong Provincial Key Laboratory of Civil Engineering Disaster Prevention and Mitigation, College of Civil Engineering and Architecture, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China; 2. Geotechnical Research Institute, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 210098, China)

Abstract: Mohr circle is extensively used in strength theory of geotechnical materials, stress path and bearing capacity of foundations. The pole point is a special point on the Mohr circle. It is unique and can help to determine stresses acting on any plane. In particular, the pole point method is capable of solving complex stress problems. Based on the parallel line and normal line methods stated in textbooks of soil mechanics and material mechanics, a new method to find the pole point, i.e. the ray method, is put forward. The validity and the uniqueness of the ray method are proved by using the stress equilibrium method of the isolated element. It is concluded that the parallel line method and the normal line method are special cases of the ray method. The pole points obtained by using the parallel line method and the normal line method separately are not in the same position. But the desired stress state for any plane by using the two methods are the same. However, the parallel line method is relatively easy to use. Although the ray method is relatively complex to use, it can help to understand the concept of the pole point thoroughly.

Keywords: Mohr circle; pole point; parallel line method; normal line method; ray method

1 引言

极点是莫尔圆上的一个特殊点, 具有惟一性, 通过极点可快速、简便地获得复杂条件下的应力状态, 从而避免采用复杂的理论公式。目前定义极点的方法主要有两种: 平行线法和法线法。国外主流土力教材^[1-5]及一些材料力学教材^[6]等均采用平行线法定义极点; 而另一些材料^[7-9]采用法线法定义极点。Holtz 等^[5]给出了平行线法确定极点时剪应力正方向定义方法, 但没有阐明其原因; 李大勇等^[10]证

明了平行线法极点的惟一性, 对剪应力的正方向进行了一般性证明。

本文是对文献^[10]研究成果的推进, 提出了寻找极点的新方法——射线法, 证明了平行线法及法线法是该方法的两种特殊情况。通过比较, 表明平行线法更具有使用上的便捷性, 这可能是国外土力学及材料力学广泛采用该法的原因, 但射线法的提出能加深对莫尔圆极点的深入理解, 有助于推动其进一步应用。在莫尔应力圆上, 证明了平行线法及法线法条件下, 极点具有惟一性, 由于在利用极点法

收稿日期: 2014-06-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.51379118); 山东科技大学科研创新团队资助项目 (No.2012kytd104)。

第一作者简介: 李大勇, 男, 1971年生, 博士, 教授, 主要从事海洋岩土工程方面的研究工作。E-mail: ldy@sust.edu.cn

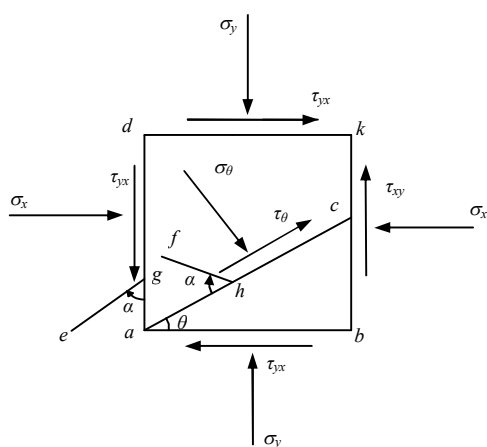
通讯作者: 高玉峰, 男, 1966年生, 博士, 教授, 主要从事岩土工程方面的研究工作。E-mail: yfgao66@163.com

求解应力问题时选用的参考平行线不同, 这3种情况(即平行线法、法线法及射线法)下的极点不是同一个点。需要注意的是, 选取正确的正应力和剪应力方向也是确定极点正确位置的重要因素^[10]。按照土力学的应力方向规定, 正应力以受压为正, 则剪应力必须以绕单元体逆时针为正。

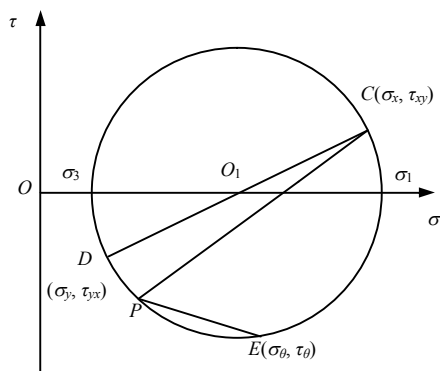
2 确定极点的射线法

在 σ - τ 坐标系下, 应力单元体 ad 面及 ab 面上的应力已知(见图1(a)), 可画出该单元体应力状态下的莫尔圆(见图1(b))。在该应力单元体的 ad 面上任取一点 g , 过该点做与该面的顺时针夹角为 α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$)的射线 ge 。同样, 在 ac 面上任取一点 h , 过该点做与 ac 面顺时针夹角为 α 的射线 hf 。过莫尔圆上点 $C(\sigma_x, \tau_{xy})$ 做 ge 线的平行线交圆于点 P , 则该点即为极点, 笔者称此确定极点的方法为射线法。当 $\alpha=0^\circ$, 即为平行线法; 当 $\alpha=90^\circ$ 时, 即为法线法。

过点 P 做 hf 线的平行线交圆于点 E , 则 E 点坐标 $(\sigma_\theta, \tau_\theta)$ 即为所求平面 ac 上的应力值。



(a) 应力单元



(b) 莫尔圆

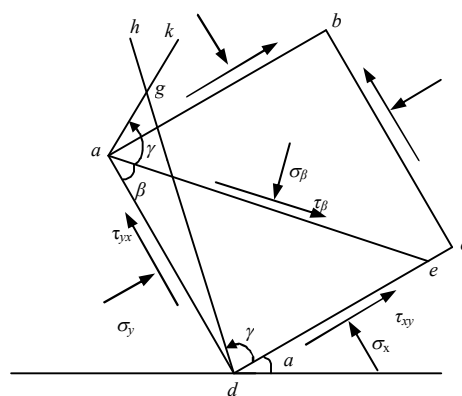
图1 应力单元体与对应的莫尔圆

Fig.1 Stress element and the corresponding Mohr's circle for stress

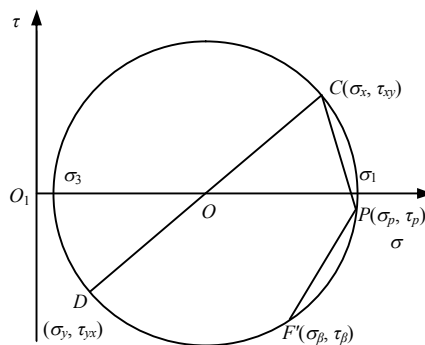
3 射线法确定极点的准确性

3.1 极点法求解未知平面的应力

对一倾斜单元, ad 及 dc 面上的应力已知(见图2(a)), 应力单元体所对应的莫尔应力圆如图2(b)所示。在该应力单元体上, 过 d 点做射线 dh , 令其与 cd 面夹角为 γ , 过 a 点做射线 ak , 令该射线与 ae 的夹角为 γ (见图2(a))。在对应的莫尔圆上过已知应力点 $C(\sigma_x, \tau_{xy})$ 做 dh 的平行线交圆于 P , 过 P 点做 ak 的平行线交圆于 F' , 则 F' 点的坐标 $(\sigma_\beta, \tau_\beta)$ 即为应力单元体上平面 ae 上的应力值。



(a) 倾斜应力单元



(b) 莫尔圆

图2 倾斜应力单元体与所对应的莫尔圆(射线法)

Fig.2 Inclined stress element and the corresponding Mohr circle (ray method)

3.2 旋转作图法求解给定作用面上的应力

作用面旋转法求解未知平面上应力的方法为: 根据平面 ae 与平面 dc 的位置关系, 即其外法线夹角为 $90^\circ+\beta$ (如图3(a)所示), 在莫尔圆上, 将点 $C(\sigma_x, \tau_{xy})$, 即作用面 dc 上的应力, 逆时针旋转 $2(90^\circ+\beta)$ 得到点 $F(\sigma_\beta, \tau_\beta)$ (如图3(b)所示)。

极点法作法如2.1节所示, P 点即为极点, 过 P 点作 ak 的平行线交莫尔圆于 F' 点, 即为 ae 面上的应力。

在图3(a)中, $\angle kad=\gamma+\beta$, $\angle adh=90^\circ-\gamma$, 由三角关系知, $\angle agh=\angle kad+\angle adh=90^\circ+\beta$ 。又如图3(b)

所示, $\angle CPF' = \angle agh = 90^\circ + \beta$ 。由圆弧 CDF 对应的圆心角为 $\angle FOC = 2(90^\circ + \beta)$, 由角度关系 $\angle FOC = 2\angle CPF'$, 即 $\angle CPF'$ 是圆弧 CDF 对应的圆周角, 所以点 F 与点 F' 重合, 说明极点法与旋转作图法所得到的结果相同。

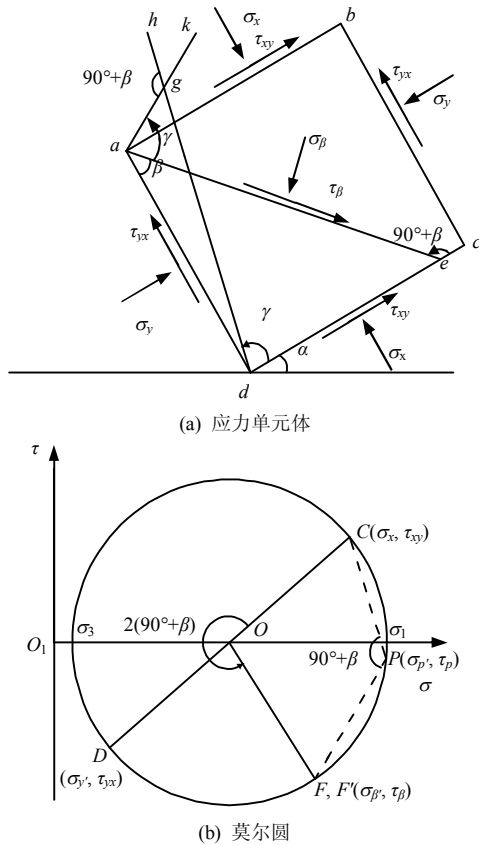


图3 应力单元体与所对应的莫尔圆(旋转法和射线法)
Fig.3 Stress element and the corresponding Mohr circle (rotation and ray method)

当应力作用面不互相垂直时, 即它们的应力值不位于莫尔圆直径两端, 旋转作图法遇到了很大困难。然而, 利用隐含存在的极点及这两个不共直径的应力点, 它们是不共线的3点, 因此, 可以方便做出莫尔圆, 从而解决复杂应力问题^[10]。

4 射线法确定极点的惟一性

已知单元体的平面应力状态(见图4(a)), 一旦极点的定义方法确定, 在莫尔圆上有且仅有一个极点与之对应, 即极点具有惟一性。采用反证法证明, 假设极点不惟一, 若主应力求得极点 P' (见图4(b))与由已知应力平面 de 利用极点法作图得极点 P 不重合, 则证明极点不惟一; 否则, 极点惟一。

证明过程如下:

过点 d 做射线 dk , 与直线 de 的夹角为 γ 。过点

c 做射线 ch , 与作用面 bc 夹角为 γ 。过点 c 做水平辅助线 cg , 竖直辅助线 cf (见图4(a)), 两者互相垂直, 由几何关系可得 $\angle bcf = \alpha$, $\angle gch = \alpha + \beta - 90^\circ$, 由几何平行关系(见图4(b)), $\angle BAP' = \alpha + \beta - 90^\circ$ 。

过点 A 做 ch 的平行线交圆于 P' 点。过点 C 做 dk 的平行线交莫尔圆于点 P , 过点 C 做水平射线 CF , 过点 C 做 AB 的垂线交 AB 于 D , 过点 C 做 de 的平行线交 AB 于 E , 连接 PO_1 (见图4(b))。

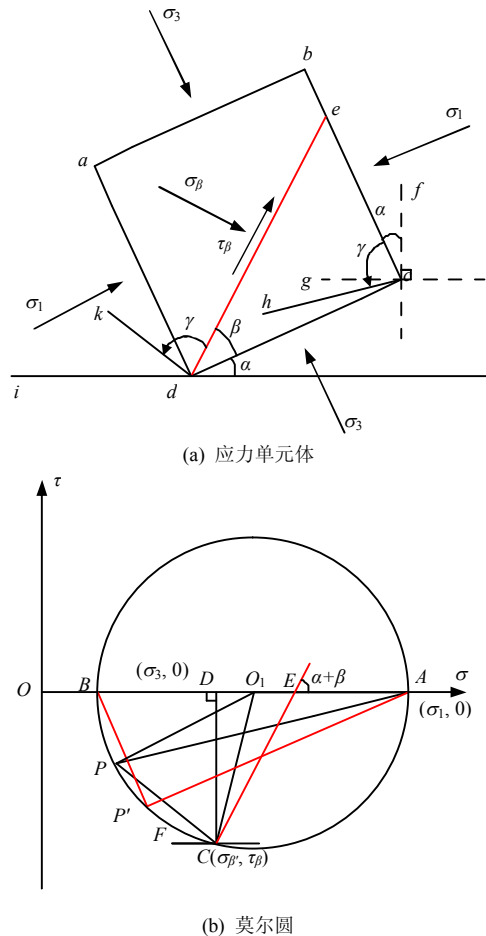


图4 应力单元体与所对应的莫尔圆
Fig.4 Stress element and the corresponding Mohr circle

平面 de 上的应力由主应力表示为

$$\sigma_\beta = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\beta \quad (1)$$

$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\beta \quad (2)$$

在莫尔圆上, 圆心 O_1 的坐标为 $(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0)$,

由 C 点的坐标可知, CD 线长度为

$$|CD| = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\beta \quad (3)$$

O_1C 线长度为

$$|O_1C| = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\beta \quad (4)$$

在图 4(b)的 $\triangle DO_1C$ 中, 有 $\tan \angle DO_1C = \frac{|CD|}{|O_1C|} = \tan 2\beta$, 即 $\angle DO_1C = 2\beta$ 。

由应力单元体与莫尔圆上直线的平行对应关系, 可知 $\angle PCF = \angle kdi = 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma$, 则 $\angle DCP = 90^\circ - \angle PCF = \alpha + \beta + \gamma - 90^\circ$ 。在 $\triangle DCO_1$ 中, $\angle DCO_1 = 90^\circ - 2\beta$, 所以,

$$\angle PCO_1 = \angle DCP + \angle DCO_1 = \alpha + \gamma - \beta \quad (5)$$

在 $\triangle PO_1C$ 中,

$$\angle PO_1C = 180^\circ - 2\angle PCO_1 = 180^\circ - 2(\alpha + \gamma - \beta) \quad (6)$$

因此,

$$\angle PO_1B = \angle CO_1D - \angle CO_1P = 2(\alpha + \gamma) - 180^\circ \quad (7)$$

所以 $\angle BAP = \alpha + \gamma - 90^\circ$, 因此, $\angle BAP' = \angle BAP$, 即点 P 与 P' 重合, 说明极点具有惟一性。

5 射线法解决平面应力问题算例

图 5 为给定的平面单元体应力状态^[11]。由莫尔圆直径上的两点 A 、 B 可作出相应莫尔应力圆 (见图 6(a)), 利用极点法得到隔离体上 ac 面的应力值 (见图 6(b))。

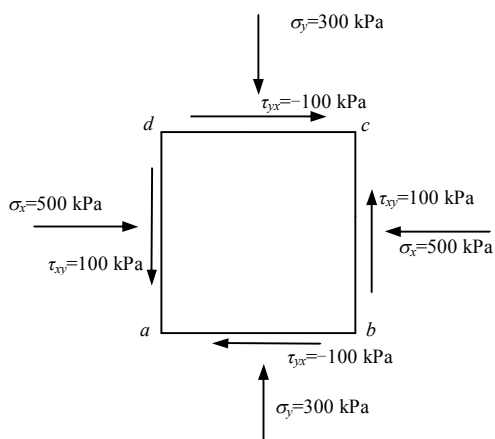


图 5 平面应力单元体

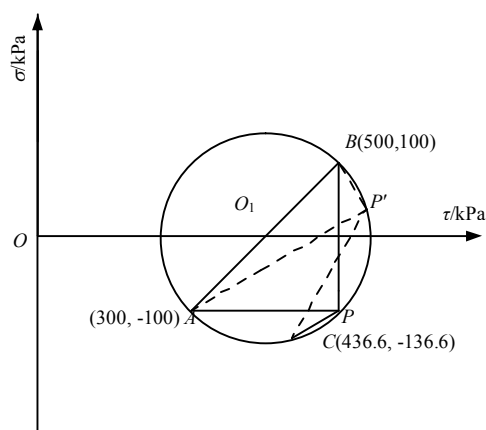
Fig.5 Stress state for two-dimensional element

分别用平行线法与射线法在莫尔应力圆上作平面 ae 上的应力。平行线法作图步骤如下: 在莫尔应力圆上 (见图 6(a)), 过 B 点作 be 的平行线, 与莫尔圆的交点为 P 。过 A 点作 ab 的平行线, 交莫尔圆于 P 点, 该点即为平行线法下的极点。过 P 点作 ae 的平行线交莫尔圆于 C 点, 则该点的坐标 (436.6, -136.6) 即为平面 ae 上的应力值, 即 $\sigma_{ac} = 436.6$ kPa, $\tau_{ac} = -136.6$ kPa, 负号表示剪应力绕隔离体顺时针方

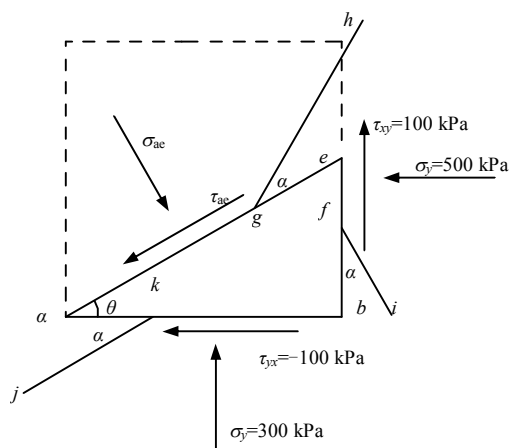
向。

射线法作图步骤如下:

在 ab 上取一点 k , 过该点做与 ab 逆时针夹角 α 为射线 kj , 相同的, 在 be 上作 fi , 在 ae 上做 gh (见图 6(b))。在莫尔应力圆上 (见图 6(a)) 过 A 点做 kj 的平行线交莫尔圆于 P' 点, 过 B 点作 fi 的平行线交圆于 P' , 该点即为射线法定义下的极点。过 P' 点作 gh 的平行线交莫尔圆于 C 点, 由此得到截面 ae 上的应力值 $\sigma_{ac} = 436.6$ kPa, $\tau_{ac} = -136.6$ kPa。



(a) 莫尔圆



(b) 隔离体

图 6 莫尔圆及隔离体

Fig.6 Mohr circle and isolated element

通过两种方法所得到的结果进行对比, 射线法与平行线法做出的结果是一致的, 但平行线法比射线法在使用上更便捷。同时, 该例也说明作极点的方法不同, 极点不是同一个点。

6 结 论

(1) 提出了定义极点的射线法。平行线法和射线法是射线法的特殊情况, 而平行线法更具有使用上的便利。

(2) 射线法、平行线法及法线法所定义的极点不是同一个点, 然而特定方法下的极点位置是惟一的。这 3 种方法虽然所得的极点位置不同, 但求得的应力是相同的。

(3) 应用射线法时, 必须先定义射线与作用面具有相同的夹角和一致的转向, 否则会导致错误的极点位置。

(4) 通过利用平行线法和射线法对平面应力单元进行应力分析, 说明不同方法下, 得到的结果相同, 但是极点不是同一个点, 平行线法在使用上比射线法更具便捷性。

参 考 文 献

- [1] TERZAGHI K. Theoretical soil mechanics[M]. New York: John Wiley and Sons, 1943: 15—65.
- [2] LAMBE T, WHITMAN R. Soil mechanics[M]. New York: John Wiley and Sons, 1969.
- [3] BUDHU M. Soil mechanics and foundations(Third edition)[M]. New York: John Wiley and Sons, 2011: 131—185.
- [4] DAS B. Principles of geotechnical engineering (Seven edition)[M]. [S.l.]: Cengage Learning, 2010.
- [5] HOLTZ R, KOVACS W. An introduction to geotechnical engineering [M]. [S.l.]: Prentice-Hall Inc, 1981.
- [6] GERE M, GOODNO J. Mechanics of materials[M]. [S.l.]: RPK Editorial services Inc, 2009: 536—616.
- [7] 粟一凡. 材料力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1984: 7—16.
- [8] 武建华. 材料力学[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 2002: 194—204.
- [9] 赵九江. 材料力学[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2002: 159—161.
- [10] 李大勇, 郭彦雪, 高玉峰. 莫尔圆极点法原理及应用[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(10): 1883—1888.
- [11] LI Da-yong, GUO Yan-xue, GAO Yu-feng. Principle of pole point method of Mohr circle and its applications[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2013, 35(10): 1883—1888.
- [12] MERRY SCOTT M, LAWTON EVERT C. A Review of shear stress sign convention in interpreting Mohr's circle using the pole of planes method[C]//GeoCongress. [S.l.]: Geotechnical Engineering Education, 2012: 1263—1272.
- [13] 中华人民共和国水利部. 土工合成材料测试规程(SL/T23521999)[S]. 北京: 中国水利水电出版社, 1999.
- [14] 余巍, 陈轮, 王钊. 无纺土工织物保土应用中的概率设计准则[J]. 岩土力学, 2007, 28(10): 2052—2055.
- [15] SHE Wei, CHEN Lun, WANG Zhao. A probabilistic criterion for nonwoven geotextiles retention application[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2007, 28(10): 2052—2055.
- [16] RAWAL A. Structural analysis of pore size distribution of nonwovens[J]. **Journal of the Textile Institute**, 2010, 101(4): 350—359.
- [17] MATHERON G. Ensembles fermes aleatoires, ensembles semi-markoviens et polyedres poissoniens[J]. **Advances in Applied Probability**, 1972, 4(3): 508—541.
- [18] FAURE Y H, GOURC J P, GENDRIN P. Structural study of porometry and filtration opening size of geotextiles[J]. **Geosynthetics: Microstructure and Performance**, 1990, 1076(8): 102—119.
- [19] RAWAL A, SARASWAT H. Technical Note[J]. **Geotextiles and Geomembranes**, 2011, 29(3): 363—367.
- [20] RAWAL A, RAO P V K. Effect of fiber orientation on pore size characteristics of nonwoven structures[J]. **Journal of Applied Polymer Scientists**, 2010, 118(24): 2668—2673.
- [21] GIROUD J P. Poisson's ratio of unreinforced geomembranes and nonwoven geotextiles subjected to large strains[J]. **Geotextiles and Geomembranes**, 2004, 22(4): 297—305.
- [22] 杨艳. 土工织物等效孔径测定方法的分析[D]. 天津: 天津大学, 2009.
- [23] RAWAL A, AGRAHARI S K. Pore size characteristics of nonwoven structures under uniaxial tensile loading[J]. **Journal of Materials Science**, 2011, 46(13): 4487—4493.
- [24] RAWAL A, Priyadarshi A. Tensile behaviour of nonwoven structures: Comparison with experimental results[J]. **Journal of Materials Science**, 2010, 45(24): 6643—6652.
- [25] LOMBARD G, ROLLIN A, WOLFF C. Theoretical and experimental opening sizes of heat-bonded geotextiles[J]. **Textile Research Journal**, 1989, 59(4): 208—217.

上接第 1621 页